

Neparne pravilne prizme imaju p-neovisan put kraći od “očitog” puta (Hipoteza H1)

Zlatko, Elen

3. veljače 2026.

1 Postavke problema i definicije

1.1 Geometrijska konstrukcija

Promatramo pravilnu n -prizmu gdje je n neparan prirodan broj ($n \geq 3$). Baze prizme su pravilni n -terokuti, a bočna površina (plašt) sastoji se od n pravokutnika.

Definicija 1 (Parametri prizme). Definiramo sljedeće parametre:

- s : duljina stranice baze (brida baze);
- b : duljina simetrale baze pravilnog n -terokuta (udaljenost od vrha do polovišta nasuprotne stranice);
- h : visina prizme (duljina bočnog brida);
- $k = h/b$: normalizirana visina prizme;
- $\beta = 2\pi/n$: centralni kut koji odgovara jednoj stranici baze.

Napomena 1. Za neparne n , simetrala baze prolazi kroz jedan vrh i polovište suprotne stranice. Duljina simetrale b ovisi o duljini stranice s prema formuli:

$$b = \frac{s}{2} \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

1.2 Razvoj plašta u ravninu

Plašt prizme možemo “razmotati” u ravninu kao niz od n pravokutnika dimenzija $s \times h$, postavljenih jedan do drugog horizontalno.

Definicija 2 (Koordinatni sustav razvoja). U ravninskom razvoju koristimo Kartezijev koordinatni sustav gdje:

- Horizontalna os: pravokutnici se slažu od $x = 0$ do $x = ns$;
- Vertikalna os: donji rub pravokutnika postavljen je na $y = Y_{\text{bot}}$, gornji rub na $y = Y_{\text{top}} = Y_{\text{bot}} + h$;
- Donja baza (n -terokuti) smještena je ispod pravokutnika ($y < Y_{\text{bot}}$);
- Gornja baza smještena je iznad pravokutnika ($y > Y_{\text{top}}$).

Bez gubitka općenitosti, postavljamo $Y_{\text{bot}} = b$.

1.3 Rotacija (kotrljanje) baza

Da bismo u ravninskom razvoju prikazali sve moguće puteve između točaka na bazama, potrebno je prikazati baze na različitim pozicijama koje odgovaraju “kotrljanju” baza.

Definicija 3 (Kotrljanje donje baze). Neka je D_0 pravilni n -terokut koji predstavlja donju bazu u početnoj poziciji, s jednom stranicom postavljenom na interval $[0, s]$ na visini $y = Y_{\text{bot}}$.

Za $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, definiramo D_i kao n -terokut dobiven uzastopnim rotacijama D_0 za kut $+\beta$ oko desnog vrha trenutne stranice (brid prizme). Tako se donja baza “kotrlja” udesno u razvoju.

Definicija 4 (Kotrljanje gornje baze). Slično, neka je G_0 pravilni n -terokut koji predstavlja gornju bazu u početnoj poziciji, s jednom stranicom na intervalu $[0, s]$ na visini $y = Y_{\text{top}}$, ali okrenut “prema dolje”.

Za $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, definiramo G_j kao n -terokut dobiven rotacijama G_0 za kut $-\beta$ (u suprotnom smjeru). Tako se gornja baza “kotrlja” udesno, ali u suprotnom smjeru rotacije.

1.4 Točke A i B s parametrom p

Definicija 5 (Točke na simetrali). Parametar $p \in [0, 0.5]$ određuje položaj točaka na simetrali baze:

- Točka $A_0(p)$ nalazi se na simetrali donje baze D_0 , na udaljenosti $b(1 - p)$ od gornjeg ruba baze prema dolje:

$$A_0(p) = \left(\frac{s}{2}, Y_{\text{bot}} - b(1 - p) \right).$$

- Točka $B_0(p)$ nalazi se na simetrali gornje baze G_0 , na udaljenosti bp od donjeg ruba baze prema gore:

$$B_0(p) = \left(\frac{s}{2}, Y_{\text{top}} + bp \right).$$

Kada kotrljamo baze, točke $A_i(p)$ i $B_j(p)$ rotiraju zajedno sa svojim bazama:

$$\begin{aligned} A_i(p) &= R_i(A_0(p)), \\ B_j(p) &= S_j(B_0(p)), \end{aligned}$$

gdje R_i i S_j predstavljaju kompozicije rotacija opisane gore.

1.5 Definicija p-neovisnosti

Definicija 6 (p-neovisan put). Za fiksne indekse i, j , duljina puta između $A_i(p)$ i $B_j(p)$ je

$$d_{ij}(p) = \|A_i(p) - B_j(p)\|.$$

Put nazivamo **p-neovisnim** ako je $d_{ij}(p)$ konstanta za sve $p \in [0, 0.5]$, što je ekvivalentno uvjetu

$$\frac{d}{dp} [d_{ij}(p)^2] = 0 \quad \text{za sve } p \in [0, 0.5].$$

2 Algebarski uvjeti za p-neovisnost

Lema 1 (Uvjet p-neovisnosti). Put $d_{ij}(p)$ je p-neovisan ako i samo ako vrijedi

$$A'_i(p) = B'_j(p)$$

za sve $p \in [0, 0.5]$.

Dokaz. Neka je $v(p) := A_i(p) - B_j(p)$. Tada je

$$\frac{d}{dp} \|v(p)\|^2 = \frac{d}{dp} (v(p) \cdot v(p)) = 2 v(p) \cdot v'(p).$$

Put je p-neovisan ako i samo ako je $\|v(p)\|^2$ konstanta, tj. $v(p) \cdot v'(p) = 0$ za sve p .

Budući da su transformacije R_i i S_j rotacije koje ne ovise o p , vrijedi

$$A'_i(p) = R_i(A'_0(p)), \quad B'_j(p) = S_j(B'_0(p)).$$

Iz definicija,

$$A'_0(p) = (0, b), \quad B'_0(p) = (0, b).$$

Dakle, $v'(p) = A'_i(p) - B'_j(p)$ ne ovisi o p (označimo ga v_1).

Vrijedi $v(p) = v_0 + p v_1$ gdje je $v_0 = v(0)$ konstanta. Uvjet $v(p) \cdot v_1 = 0$ za sve p daje

$$(v_0 + p v_1) \cdot v_1 = v_0 \cdot v_1 + p \|v_1\|^2 = 0 \quad \text{za sve } p.$$

To implicira $\|v_1\|^2 = 0$ i $v_0 \cdot v_1 = 0$, pa iz prvog uvjeta slijedi $v_1 = 0$, tj.

$$A'_i(p) = B'_j(p).$$

Obrnuto, ako je $A'_i(p) = B'_j(p)$, tada je $v'(p) = 0$ i $\|v(p)\|$ je konstantna. □

Lema 2 (Opći uvjet p-neovisnosti). *Uvjet $A'_i(p) = B'_j(p)$ zadovoljen je ako i samo ako je zbroj indeksa višekratnik broja n :*

$$i + j = M \cdot n, \quad \text{za neki } M \in \mathbb{N}.$$

Među svim takvim parovima, onaj s $M = 1$ (tj. $i + j = n$) definira p-neovisan put s najmanjom horizontalnom udaljenošću u razvoju, a time i globalno najkraći p-neovisan put.

Dokaz. Analizom derivacija (rotacija vektora normale) dobili smo uvjet:

$$\begin{aligned} -b \sin(i\beta) &= b \sin(j\beta), \\ b \cos(i\beta) &= b \cos(j\beta). \end{aligned}$$

Ovo je ekvivalentno $e^{i i \beta} = e^{-i j \beta}$, što implicira:

$$(i + j)\beta = 2\pi M \quad \Rightarrow \quad (i + j) \frac{2\pi}{n} = 2\pi M \quad \Rightarrow \quad i + j = M \cdot n.$$

Svaki prirodni broj M generira klasu p-neovisnih puteva:

- **Slučaj $M = 1$ (Jednostavni put):** Vrijedi $i + j = n$. Ovo odgovara putu koji ne radi puni krug oko prizme (osim ako su točke na samom rubu). Horizontalna udaljenost u razvoju je minimalna za p-neovisne puteve.
- **Slučaj $M \geq 2$ (Spiralni putevi):** Vrijedi $i + j = 2n, 3n, \dots$. Ovi putevi predstavljaju jedan ili više punih namotaja oko prizme. Iako su p-neovisni, njihova horizontalna komponenta u razvoju uključuje dodatnih n panela za svaki korak M , što drastično povećava duljinu puta (osim za ekstremno visoke prizme, tj. velike k , što je predmet hipoteze H3).

Budući da u dokazu H1 tražimo **najkraći** p-neovisan put, fokusiramo se na slučaj s najmanjom horizontalnom udaljenošću, a to je $M = 1$. Dakle, relevantan uvjet je:

$$i + j = n.$$

□

3 Geometrijska izvedivost puteva

Ne zadovoljava svaki par (i, j) s $i + j = n$ uvjet da pravac između $A_i(p)$ i $B_j(p)$ u razvoju predstavlja *izvediv* put po bočnoj površini (tj. da ne prolazi kroz unutrašnjost bridova prizme).

Lema 3 (Jedinstvenost izvedivog p-neovisnog puta). *Među parovima (i, j) s $i + j = n$, jedini par za koji pravac između $A_i(p)$ i $B_j(p)$ u razvoju leži unutar unije točno dva susjedna pravokutnika (i odgovarajućih dijelova baza) jest par s $|j - i| = 1$, tj.*

$$(i, j) = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2} \right) \quad \text{ili} \quad \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2} \right).$$

Dokaz. Bez gubitka općenitosti, pretpostavimo $i < j$. Razlika $m := j - i$ mjeri koliko pravokutnika u razvoju razdvaja točke A_i i B_j .

Iz uvjeta $i + j = n$ i $m = j - i$, dobivamo

$$j = \frac{n+m}{2}, \quad i = \frac{n-m}{2}.$$

Za neparan n , broj m mora biti neparan da bi i, j bili cijeli brojevi.

Horizontalne koordinate u razvoju. Točka A_i pripada pravokutniku s bazom na intervalu $[is, (i+1)s]$, pa njena horizontalna koordinata zadovoljava $x_{A_i} \in (is, (i+1)s)$.

Točka B_j pripada pravokutniku s bazom na $[js, (j+1)s]$, pa $x_{B_j} \in (js, (j+1)s)$.

Pravac između A_i i B_j parametarski je zadan kao

$$\ell(t) = (1-t)A_i + tB_j, \quad t \in [0, 1].$$

Horizontalna koordinata je $x(t) = (1-t)x_{A_i} + tx_{B_j}$, koja je strogo monotona u t .

Presijecanje vertikalnih granica. Vertikalne granice pravokutnika u razvoju nalaze se na $x = \ell s$ za $\ell = 1, 2, \dots, n-1$. Svaka granica odgovara bridu prizme u 3D prostoru.

Za $m \geq 2$, postoji barem jedna vertikalna granica na $x = \ell s$ gdje je $i < \ell < j$, tj. $\ell \in \{i+1, i+2, \dots, j-1\}$.

Pravac $\ell(t)$ presijeca tu granicu u točki s

$$x(t) = \ell s \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ell s - x_{A_i}}{x_{B_j} - x_{A_i}}.$$

Budući da $x_{A_i} < is + s = (i+1)s \leq \ell s$ i $x_{B_j} > js > \ell s$, vrijedi $0 < t < 1$.

Odgovarajuća vertikalna koordinata je

$$y(t) = (1-t)y_{A_i} + ty_{B_j}.$$

Ako se A_i nalazi na gornjem rubu svog pravokutnika ($y_{A_i} = Y_{\text{bot}}$) a B_j na donjem rubu svog pravokutnika ($y_{B_j} = Y_{\text{top}}$), tada

$$y(t) = (1-t)Y_{\text{bot}} + tY_{\text{top}} \in (Y_{\text{bot}}, Y_{\text{top}}).$$

Dakle, pravac presijeca vertikalnu granicu u njenoj *unutrašnjoj* točki, a ne na vrhu pravokutnika. Takav pravac ne predstavlja izvediv put na bočnoj površini jer bi zahtijevao “prelazak” preko brida koji nije vrh.

Slučaj $m = 1$. Ako je $m = 1$, tj. $j = i + 1$, tada se A_i i B_j nalaze u susjednim pravokutnicima. Između njih nema unutarnjih vertikalnih granica, pa pravac može ležati unutar unije tih dvaju pravokutnika i odgovarajućih dijelova baza. Takav put je *izvediv*.

Zaključak: jedini izvedivi p-neovisni put (za $M = 1$) nastaje za $m = 1$, što odgovara parovima

$$\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \quad \text{ili} \quad \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right).$$

□

4 Formula za duljinu p-neovisnog puta

Lema 4 (Izvod formule za duljinu). *Za par indeksa $(i, j) = (\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$ ili obrnuto, duljina p-neovisnog puta je*

$$d = b\sqrt{k^2 + 2k \cos \frac{\pi}{n} + 1}.$$

Dokaz. Budući da je put p-neovisan, možemo birati bilo koju vrijednost $p \in [0, 0.5]$ za računanje duljine. Radi simetrije, odaberemo $p = 0.5$.

Položaji točaka pri $p = 0.5$. Pri $p = 0.5$, točke su na pola puta duž simetrala:

$A_i(0.5)$: na udaljenosti $0.5b$ od gornjeg ruba donje baze prema dolje,

$B_j(0.5)$: na udaljenosti $0.5b$ od donjeg ruba gornje baze prema gore.

Projekcije simetrala. Kod p-neovisnog puta (za i, j takve da $i + j = n$ i $|i - j| = 1$), simetrale na kojima leže točke A i B u razvijenoj mreži zakrenute su za kut $\alpha = \pi/n$ u odnosu na vertikalu, ali u suprotnim smjerovima (jedna u lijevo, druga u desno).

Horizontalna udaljenost Δx odgovara zbroju horizontalnih projekcija dijelova simetrala na kojima leže točke:

$$\Delta x = (0.5b) \sin(\pi/n) + (0.5b) \sin(\pi/n) = b \sin(\pi/n).$$

Vertikalna udaljenost Δy sastoji se od visine h i zbroja vertikalnih projekcija dijelova simetrala:

$$\Delta y = h + (0.5b) \cos(\pi/n) + (0.5b) \cos(\pi/n) = h + b \cos(\pi/n).$$

Primjena Pitagorinog poučka. Duljina puta je:

$$\begin{aligned} d^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ &= (b \sin(\pi/n))^2 + (h + b \cos(\pi/n))^2 \\ &= b^2 \sin^2(\pi/n) + h^2 + 2hb \cos(\pi/n) + b^2 \cos^2(\pi/n) \\ &= b^2 + h^2 + 2hb \cos(\pi/n). \end{aligned}$$

Zamjenom $h = kb$:

$$\begin{aligned} d^2 &= b^2 + (kb)^2 + 2(kb)b \cos(\pi/n) \\ &= b^2(1 + k^2 + 2k \cos(\pi/n)) \\ &= b^2(k^2 + 2k \cos(\pi/n) + 1). \end{aligned}$$

Dakle,

$$d = b\sqrt{k^2 + 2k \cos(\pi/n) + 1}.$$

□

5 Glavni rezultat

Teorem 1 (Egzistencija i jedinstvenost p-neovisnog puta). *Na pravilnoj prizmi s neparnim brojem stranica $n \geq 3$ postoji točno jedan skup p-neovisnih puteva koji su ujedno i izvedivi (geodetski) putevi na plaštu prizme i nemaju spiralnu prirodu (ne obilaze prizmu višestruko). Taj put nastaje za indekse*

$$i = \frac{n-1}{2}, \quad j = \frac{n+1}{2},$$

ili obrnuto, a njegova duljina dana je formulom

$$d = b\sqrt{k^2 + 2k \cos \frac{\pi}{n} + 1}.$$

Dokaz. Kombiniramo rezultate prethodnih lema i propozicija:

- **Lema 1** pokazuje da je put p-neovisan ako i samo ako $A'_i(p) = B'_j(p)$.
- **Lema 2** pokazuje da ovaj uvjet algebarski implicira $i + j = M \cdot n$. Za najkraći (ne-spiralni) put biramo $M = 1$, tj. $i + j = n$.
- **Lema 3** pokazuje da od svih parova s $i + j = n$, samo onaj s $|i - j| = 1$ daje put koji je geometrijski izvediv (leži na bočnoj površini).
- **Lema 4** daje eksplicitnu formulu za duljinu tog jedinstvenog puta.

Zaključujemo da postoji točno jedan izvediv, najkraći p-neovisan put, čime je teorem dokazan. $\square$

6 Zaključna razmatranja

6.1 Usporedba s “očitim” putem

“Očiti” put između točaka A i B na suprotnim bazama prizme sastoji se od tri dijela:

- Od točke A na donjoj bazi vertikalno do plašta: duljina $b(1 - p)$;
- Vertikalno niz plašt: duljina $h = kb$;
- Od plašta do točke B na gornjoj bazi: duljina bp .

Ukupna duljina očitog puta je

$$d_{\text{očiti}} = b(1 - p) + kb + bp = b(k + 1).$$

Primijetimo da je očiti put *neovisan* o parametru p (što je intuitivno jasno iz simetrije).

Naš p-neovisan put ima duljinu

$$d = b\sqrt{k^2 + 2k \cos(\pi/n) + 1}.$$

Da pokažemo da je $d < d_{\text{očiti}}$, trebamo dokazati:

$$\sqrt{k^2 + 2k \cos(\pi/n) + 1} < k + 1.$$

Kvadriranjem obje strane (obje su pozitivne):

$$k^2 + 2k \cos(\pi/n) + 1 < k^2 + 2k + 1,$$

što je ekvivalentno

$$2k \cos(\pi/n) < 2k \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\pi/n) < 1.$$

Budući da je $\pi/n \in (0, \pi)$ za $n \geq 3$, vrijedi $\cos(\pi/n) < 1$, pa je nejednakost zadovoljena.

Zaključak: p-neovisan put je *uvijek kraći* od očitog puta za sve vrijednosti $k > 0$ i $n \geq 3$.

6.2 Slučaj parnih prizmi

Za parne vrijednosti n , uvjet $i + j = n$ (za nespiralne puteve) s uvjetom susjedstva $|i - j| = 1$ daje

$$i = \frac{n-1}{2}, \quad j = \frac{n+1}{2},$$

što *nisu cijeli brojevi* jer su $n-1$ i $n+1$ neparni. Uvjet $i + j = M \cdot n$ za parni n uvijek daje parni zbroj, pa razlika $i - j$ mora biti parna, što je u kontradikciji s uvjetom susjedstva $|i - j| = 1$.

Zaključak: Parne prizme *nemaju* p-neovisan put između točaka na simetralama koje prelaze iz jedne baze u drugu preko susjednog panela. Ovo je fundamentalna razlika između neparnih i parnih prizmi u kontekstu geodetskih puteva.